



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1

Álgebra

TEMA

MCD y MCM DE POLINOMIOS
RADICACION



Semana
7.2

Máximo Común Divisor (MCD)

Definición: Se dice que el polinomio $d(x) \in \mathbb{K}[x]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un máximo común divisor de $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ (donde no son a la vez $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$) si $d(x)$ satisface:

- a) $d(x) | f(x) \wedge d(x) | g(x)$.
- b) $h(x) | f(x) \wedge h(x) | g(x) \rightarrow h(x) | d(x)$. ($h(x) | d(x)$: $h(x)$ divide a $d(x)$)

Una forma equivalente de definir el MCD sería, como el polinomio $d(x)$ de grado más alto que divide tanto a $f(x)$ como a $g(x)$.

Procedimiento de cálculo de un MCD

- [1] Factorizar los polinomios dados.
- [2] Un MCD es el producto de los factores o divisores comunes, con sus menores potencias.

Observación:

- 1) Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que $f(x) = f_1^m(x) \cdot f_2^n(x)$ y $g(x) = f_1^p(x) \cdot f_2^q(x)$, donde $f_1(x), f_2(x)$ no tienen factores en común y son primos.

$$\text{MCD}(f(x); g(x)) = a f_1^{\min\{m,p\}}(x) \cdot f_2^{\min\{n,q\}}(x), a \in \mathbb{R}$$

- 2) Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que al factorizarlos obtenemos lo siguiente $f(x) = h^m(x) \cdot f_1^n(x)$ y $g(x) = r^p(x) \cdot f_1^q(x)$, donde $h(x)$ y $r(x)$ no tienen factores en común.

$$\text{MCD}(f(x); g(x)) = a f_1^{\min\{n,q\}}(x), a \in \mathbb{R}$$

- 3) Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios diferentes entonces el $\text{MCD}(f(x), g(x))$ divide a $f(x) - g(x)$.

Nota: Para obtener cierta clase de unicidad, se podría asumir que el $\text{MCD}(f(x); g(x))$ sea Mónico.

Ejemplo

Determine el MCD en $\mathbb{Q}[x]$ de los siguientes polinomios:

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2n+1}(x - 2)^{n+1} \quad \text{y} \quad g(x) = (x + 1)^{2n-1}(x^2 - 4)^{n+4}$$

Resolución:

- Paso 1:

$$f(x) = (x - 1)^{2n+1}(x + 1)^{2n+1}(x - 2)^{n+1}$$

$$g(x) = (x + 1)^{2n-1}(x - 2)^{n+4}(x + 2)^{n+4}$$

- Paso 2:

El producto de factores en común de $f(x)$ y $g(x)$ con menor exponente es $(x + 1)^{2n-1}(x - 2)^{n+1}$.

- Paso 3:

$$\text{MCD}(f(x), g(x)) = (x + 1)^{2n-1}(x - 2)^{n+1}$$

Ejercicio 196

Calcule la suma de los coeficientes del MCD de los polinomios

$$P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$$

A) 0

B) 2

C) 4

D) 6

E) 8



Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Definición. Se dice que el polinomio $m(x) \in \mathbb{K}[x]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un *mínimo común múltiplo* de $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ si $m(x)$ satisface:

a) $f(x) | m(x) \wedge g(x) | m(x)$.

b) $f(x) | h(x) \wedge g(x) | h(x) \rightarrow m(x) | h(x)$

Una forma equivalente de definir el MCM sería, como el *polinomio $m(x)$ de menor grado que es divisible tanto por $f(x)$ como por $g(x)$.*

Procedimiento de cálculo de un MCM

[1] Factorizar los polinomios dados.

[2] Un MCM es el producto de todos los factores o divisores comunes y no comunes, con sus mayores potencias.

Observación:

1) Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que $f(x) = f_1^m(x) \cdot f_2^n(x)$ y $g(x) = f_1^p(x) \cdot f_2^q(x)$, donde $f_1(x), f_2(x)$ no tienen factores en común y son primos.

$$MCM(f(x); g(x)) = a f_1^{\max\{m,p\}}(x) \cdot f_2^{\max\{n,q\}}(x), a \in \mathbb{R}$$

2) Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que al factorizarlos obtenemos lo siguiente $f(x) = h^m(x) \cdot f_1^n(x)$ y $g(x) = r^p(x) \cdot f_1^q(x)$, donde $h(x)$ y $r(x)$ no tienen factores en común.

$$MCM(f(x); g(x)) = a h^m(x) \cdot r^p(x) \cdot f_1^{\max\{n,q\}}(x), a \in \mathbb{R}$$

Nota: Para obtener cierta clase de unicidad, se podría asumir que el $MCM(f(x); g(x))$ sea Mónico.

Ejemplo

Determine el MCM en $\mathbb{Q}[x]$ de los siguientes polinomios:

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2n+1}(x - 2)^{n+1} \quad \text{y} \quad g(x) = (x + 1)^{2n-1}(x^2 - 4)^{n+4}$$

Resolución:

- Paso 1:

$$f(x) = (x - 1)^{2n+1}(x + 1)^{2n+1}(x - 2)^{n+1}$$

$$g(x) = (x + 1)^{2n-1}(x - 2)^{n+4}(x + 2)^{n+4}$$

- Paso 2:

Factores en común con mayor exponente: $(x + 1)^{2n+1}(x - 2)^{n+4}$

Factores no comunes con mayor exponente: $(x - 1)^{2n+1}(x + 2)^{n+4}$

- Paso 3:

$$MCM(f(x), g(x)) = (x + 1)^{2n+1}(x - 2)^{n+4}(x - 1)^{2n+1}(x + 2)^{n+4}$$

Ejercicio 201

Determine el número de factores primos del MCM de los polinomios:

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$$

$$Q(x) = x^6 - 1$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



Polinomios primos entre sí (PESI)

Definición: Dos polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son primos entre sí, cuando su MCD es una constante (que puede tomarse igual a 1 por unicidad).

Ejemplo:

Determine el MCD en $\mathbb{Q}[x]$ de los siguientes polinomios:

$$f(x) = 2x^2 - 8$$

$$g(x) = x^3 + 1$$

Resolución :

$$f(x) = 2(x - 2)(x + 2)$$

$$g(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{MCD}(f(x), g(x)) = 1$$

Teorema: Si f y g son polinomios mónicos, el $\text{MCM}(f; g)$ y el $\text{MCD}(f; g)$ también son mónicos, entonces se cumple que

$$\text{MCM}(f(x); g(x)) \text{MCD}(f(x); g(x)) = f(x)g(x)$$

Ejemplo: Sean

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$$
$$\text{MCM}[f(x), g(x)] \text{MCD}[f(x), g(x)] = x^3(x-1)^2(x-3)^2$$

Halle la suma de coeficientes de $g(x)$

Radicación de Polinomios

Definición. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) de grado par, con coeficiente principal positivo. Extraer su raíz cuadrada consiste en hallar otros dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) \equiv (q(x))^2 + r(x)$$

donde:

a) $q(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$

b) $r(x) \equiv 0$, o bien $\text{grado } r(x) < \text{grado } q(x)$

Es usual disponer del siguiente esquema para determinar la raíz $q(x)$ y el residuo $r(x)$

$$\sqrt{\begin{array}{c} p(x) \\ \downarrow \\ r(x) \end{array}} \bigg| q(x)$$

Donde:

$p(x)$ es el radicando, $q(x)$ es una raíz cuadrada de $p(x)$ y $r(x)$ es el residuo.

Observaciones:

- a) $r(x) \equiv 0 \iff p(x)$ es un cuadrado perfecto (decimos que tiene raíz cuadrada exacta).
- b) $\text{grado } q(x) = \frac{1}{2} (\text{grado } p(x))$.
- c) $p(x)$ tiene dos raíces ($q(x)$ o $-q(x)$).

Procedimiento para determinar $q(x)$ y $r(x)$

Paso 1: Se ordena el polinomio en forma descendente con respecto a una de sus variables.

Paso 2: Se separa los términos en grupos de 2 a partir de la izquierda hacia la derecha.

Paso 3: Se extrae la raíz cuadrada del primer término que viene a ser el primer término de la raíz cuadrada obtenida.

Paso 4: Se eleva este término al cuadrado y se pasa a restar al término correspondiente.

Paso 5: Se bajan 2 términos del polinomio, y se duplica la cantidad que se ha obtenido como raíz cuadrada.

Paso 6: Se divide el primer término del resto entre la cantidad que se duplicó y se obtiene el 2do término de la raíz.

Paso 7: Este término se coloca en tres partes, formando parte de la raíz, acompañando al doble producto y multiplicando a este binomio formado.

Paso 8: Se multiplica y se pasa a restar, y se continua la operación de la misma manera, hasta bajar los últimos términos del polinomio.

Procedimiento para determinar $q(x)$ y $r(x)$

Mediante un ejemplo se mostrara el procedimiento de extracción de la raíz cuadrada de un polinomio.

Ejemplo: Extraer una raíz cuadrada del polinomio

$$p(x) = 9x^4 - 12x^3 + 34x^2 + 10$$

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{9 \quad -12 \quad 34 \quad 0 \quad 10} \\
 \underline{-9} \\
 -12 \quad 34 \\
 \underline{12 \quad -4} \\
 30 \quad 0 \quad 10 \\
 \underline{-30 \quad 20 \quad -25} \\
 \text{Residuo} \quad 20-15
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{3 \quad -2 \quad 5} \\
 (6 \quad -2) (-2) \\
 \underline{(6 \quad -4 \quad 5) (5)} \\
 \text{I. } \frac{-12}{6} = -2 \\
 \text{II. } \frac{30}{6} = 5
 \end{array}$$

Se obtiene:

a) $q(x) = 3x^2 - 2x + 5$, que es una de las raíces cuadradas de $p(x)$.

b) El residuo $r(x) = 20x - 15$.

Ejemplo:

Halle $a - b$, si $r(x) = 18x - 3$ es el residuo que se obtiene al extraer una raíz cuadrada del polinomio

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 + ax + b$$

Resolución:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{1 \quad -4 \quad 10 \quad a \quad b} \\
 \underline{-1} \\
 -4 \quad 10 \\
 \underline{4 \quad -4} \\
 6 \quad a \quad b \\
 \underline{-6 \quad 12 \quad -9} \\
 18 \quad -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{1 \quad -2 \quad 3} \\
 (2 \quad -2) \quad (-2) \\
 \underline{(2 \quad -4 \quad 3) \quad (3)}
 \end{array}$$

$$\text{I. } \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{II. } \frac{6}{2} = 3$$

Se obtiene las dos ecuaciones

$$\text{a) } a + 12 = 18 \rightarrow a = 6.$$

$$\text{b) } b - 9 = -3 \rightarrow b = 6.$$

$$\text{c) Finalmente } \boxed{a - b = 0}.$$

Ejercicio 203

Si $P(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 - ax + b$ tiene raíz cuadrada exacta entonces halle el valor de ab .

A) -32

B) -16

C) -12

D) 16

E) 32



Radicales

dobles

Definición: Sea $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$. La expresión real $\sqrt[n]{A}$, donde A es la suma algebraica de un número racional no nulo con uno o más radicales se llama **radical doble**.

Ejemplos:

$$(a) \sqrt{6 - \sqrt{20}}$$

$$(b) \sqrt{6 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{24}}$$

$$(c) \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}$$

Transformación de un radical doble a radicales simples

Teorema: Si $B > 0, A \pm \sqrt{B} > 0$, se tiene que

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

donde $C = \sqrt{A^2 - B}$.

Observaciones:

a) Si A y C son números racionales diremos que el radical doble se transformó en la suma (o diferencia) de dos *radicales simples*.

b) Si $a > b > 0$, se cumple que

$$\sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Ejercicio 206

Halle el valor reducido de:

$$\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{6} \right)^4$$

A) 80

B) 96

C) 100

D) 125

E) 516



Ejercicio Resuelto:

Sea $-0,5 < x \leq 4$. Transformar en radicales simples

$$\sqrt{3(x+2) - \sqrt{8x^2 + 44x + 20}}.$$

Resolución

$$\sqrt{8x^2 + 44x + 20} = 2\sqrt{(2x+1)(x+5)}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3(x+2) - \sqrt{8x^2 + 44x + 20}} &= \sqrt{(x+5) + (2x+1) - 2\sqrt{(x+5)(2x+1)}} \\ &= \sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}\end{aligned}$$

RACIONALIZACIÓN

Definición. Racionalizar el denominador irracional de una fracción, es transformarla otra equivalente, con denominador racional.

Análogamente se define la racionalización del numerador.

Ejemplo :

Racionalizar la siguiente expresión

$$E = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

Resolución

$$E = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}$$

$$E = \frac{2\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{3^4}}$$

$$E = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$$

Factor Racionalizante (F.R)

Definición. El *factor racionalizante* de una expresión irracional A , es otra expresión irracional B , tal que AB es racional.

Ejemplos

(a) El F.R de $\sqrt{13}$ es $\sqrt{13}$, pues
 $\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = 13$.

(b) El F.R de $\sqrt[3]{5}$ es $\sqrt[3]{25}$, porque
 $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = 5$.

(c) ¿Cuál es el F.R de $\sqrt{7} + \sqrt{3}$?

Es $\sqrt{7} - \sqrt{3}$, puesto que

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 7 - 3 = 4.$$

Ejemplo

Racionalizar la siguiente expresión

$$E = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

Resolución.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{3 - \sqrt{6}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} \\ &= 3 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

Ejercicio 209

Halle el denominador racional de la siguiente fracción

$$F = \frac{323}{21 - 2\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{11}}$$

A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

E) 50

CASOS: Sean n y $m \in \mathbb{N}$ ($n > m$)

Denominador	Factor Racionalizante	Nuevo denominador
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$	$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$	$a - b$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a + b$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a - b$
$\sqrt[2n]{a} \pm \sqrt[2n]{b}$		$a - b$
$\sqrt[2n+1]{a} + \sqrt[2n+1]{b}$	Emplee los cocientes notables	$a + b$
$\sqrt[2n+1]{a} - \sqrt[2n+1]{b}$		$a - b$